



آزمون مرحله اول سی و هفتمین المپیاد

ریاضی کشور

دانش آموز عزیز، سؤال های این آزمون به دو شکل پنج گزینه ای و پاسخ کوتاه است. پاسخ درست به هر دو نوع سؤال ۴ نمره مثبت دارد. پاسخ غلط به هر سؤال پنج گزینه ای ۱ نمره منفی دارد ولی پاسخ غلط به سؤال های پاسخ کوتاه نمره منفی ندارد. پاسخ نامه در مورد هر دو نوع سؤال مشابه و شامل چهار ستون است که در هر کدام می توانید یک رقم از ارقام صفر تا نه را با سیاه کردن مشخص کنید.

سؤال ۱			
یکان	دهگان	صدگان	هزارگان
۰	۰	۰	۰
۱	۱	۱	۱
۲	۲	۲	۲
۳	۳	۳	۳
۴	۴	۴	۴
۵	۵	۵	۵
۶	۶	۶	۶
۷	۷	۷	۷
۸	۸	۸	۸
۹	۹	۹	۹

جواب سؤال های پاسخ کوتاه، عددی نامنفی و کمتر از ۱۰۰۰۰ است. شما باید ارقام قسمت صحیح آن را جداگانه در پاسخ نامه سیاه کنید. به عنوان مثال اگر پاسخ سؤالی ۶۹۵٫۷۳ بود شما باید از قسمت اعشاری صرف نظر کرده و در پاسخ نامه، مانند شکل روبه رو، رقم های مربوطه را سیاه کنید.
در مورد سؤال های پنج گزینه ای، شماره گزینه درست را در ستون سمت راست، مربوط به رقم یکان، سیاه کنید.

ضمناً امسال در انتهای برخی از سوالات کوتاه پاسخ بخشی

به عنوان اطمینان از پاسخ قرار داده شده است، که با علامت نمایش داده خواهد شد. این بخش یک خاصیتی از جواب را مطرح کرده و صرفاً برای جلوگیری از خطاهای محاسباتی احتمالی بوده و به روند حل هیچ کمکی نخواهد کرد.

•• (سؤال شماره صفر!) کد دفترچه شما چند است؟ آن را در صفحه اول پاسخ نامه خود مشخص کنید. مشخص نکردن این کد، عواقب ناگواری دارد که روی جلد پاسخ نامه توضیح داده شده است.

۱. دامنه تابع زیر، شامل چند عدد صحیح است؟

$$f(x) = \sqrt[4]{-1 + \sqrt[3]{-1 + \sqrt{\frac{12}{x^2 - 2x}}}}$$

محل انجام محاسبات:



آزمون مرحله اول سی و هفتمین المپیاد ریاضی کشور

۲. ۱۳۹۷ عدد حقیقی داریم که تشکیل یک تصاعد حسابی می‌دهند. اگر تعداد اعداد گویا بین این ۱۳۹۷ عدد را n بنامیم، تعداد مقادیر ممکن برای n چند حالت مختلف دارد؟

۳. مجموع ارقام عدد $\overbrace{۹۹...۹}^{۹۷} \times \overbrace{۶۶...۶}^{۹۷}$ چند است؟ (🔊 رقم دهگان جواب برابر با ۷ است.)

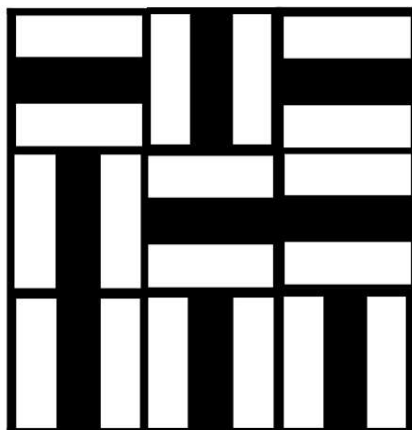
۴. می‌خواهیم یک جدول ۳×۳ را به کمک دو نوع کاشی زیر، کاشی کاری کنیم. به طوری که یک مسیر سیاه از یک ضلع جدول به ضلع مقابل آن پدید نیاید. چند حالت کاشی کاری مطلوب داریم؟



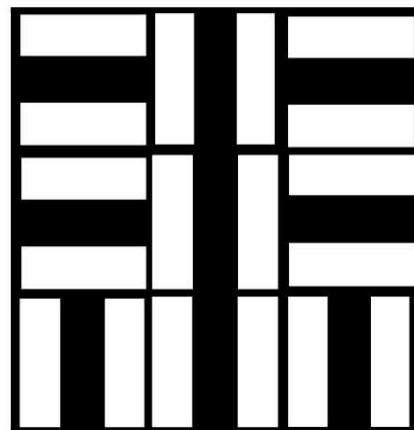
کاشی شماره ۲



کاشی شماره ۱



کاشی کاری مطلوب



کاشی کاری نامطلوب

۵۱۲ (۵)

۳۴۳ (۴)

۱۶۹ (۳)

۱۷۴ (۲)

۳۳۸ (۱)

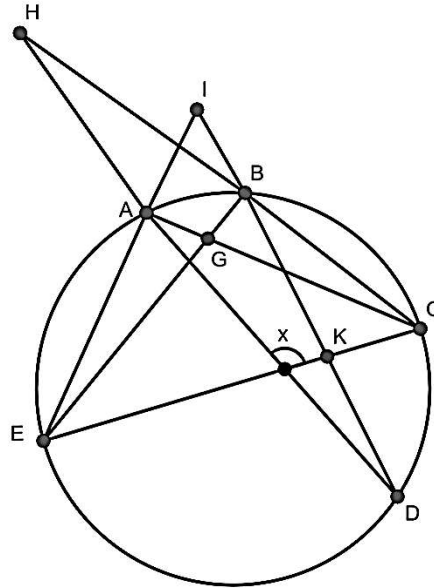
محل انجام محاسبات:



آزمون مرحله اول سی و هفتمین المپیاد ریاضی کشور

۵. چند عدد طبیعی دورقمی داریم که رقم صفر نداشته باشد و بر هر دو رقم خود بخش پذیر باشد؟

۶. در شکل زیر محل تلاقی EB با AC را G می نامیم. زاویه بین تلاقی امتداد پاره خط های AE و BD برابر 70° درجه و زاویه بین تلاقی امتداد پاره خط های DA و CB برابر با 10° درجه است. اگر زوایای $\widehat{AGB}$ و $\widehat{BKE}$ به ترتیب برابر 95° و 70° درجه باشند، مقدار x را بیابید. (شکل دقیق نمی باشد).



۷. در چند جایگشت $a_1, a_2, \dots, a_{13}$ از اعداد ۱ تا ۱۳، شرایط زیر برقرار است؟ (🔊) جواب مربع کامل است.)

$$a_1, a_2 < a_3$$

$$a_4, a_5 < a_6$$

$$a_3, a_6 < a_7$$

$$a_7 < a_8, a_9$$

$$a_8 < a_{10}, a_{11}$$

$$a_9 < a_{12}, a_{13}$$

محل انجام محاسبات:



آزمون مرحله اول سی و هفتمین المپیاد

ریاضی کشور

۸. در مثلث ABC ، نقطه M را روی ضلع AC طوری در نظر بگیرید که $CM = 2AM$. نیمساز زاویه داخلی $\hat{A}$ ، پاره خط BC را در نقطه D قطع می کند. فرض کنید AD بر خط BM عمود است. مساحت مثلث ABC چند برابر مساحت مثلث BMD است؟

۹. معادله زیر در مجموعه اعداد حقیقی چند جواب دارد؟ (جزء صحیح عدد x را با $[x]$ نمایش می دهند.)

$$[x](x - 1) = 2|x|$$

(۱) ۲ (۲) ۳ (۳) ۴ (۴) ۵ (۵) بی نهایت

۱۰. n عدد طبیعی داریم که اختلاف هردوتایی از آن ها یک عدد اول است. حداکثر مقدار n چند می تواند باشد؟

۱۱. رئوس یک پنج ضلعی (محدب یا مقعر) با مساحت ۷، روی نقاطی با مختصات صحیح در صفحه مختصات قرار دارد. حداکثر چند نقطه با مختصات صحیح می تواند درون این چندضلعی باشد؟ (نقاط روی مرز جزء نقاط درونی حساب نمی شود.)

(۱) ۶ (۲) ۲ (۳) ۳ (۴) ۴ (۵) ۵

۱۲. از مجموعه $\{1, 2, \dots, 765\}$ حداکثر چند عدد می توان انتخاب کرد به طوری که هیچ کدام مربع کامل نبوده و جمع هیچ دوتایی از آن ها برابر ۷۶۵ نباشد؟ (🔊 حاصل جمع ارقام جواب، ۱۲ است.)

۱۳. برای چند مقدار a از مجموعه $\{-\frac{5}{5}, -\frac{4}{5}, \dots, \frac{4}{5}, \frac{5}{5}\}$ تابع $f(x) = ax - [x]$ یک به یک است؟

محل انجام محاسبات:

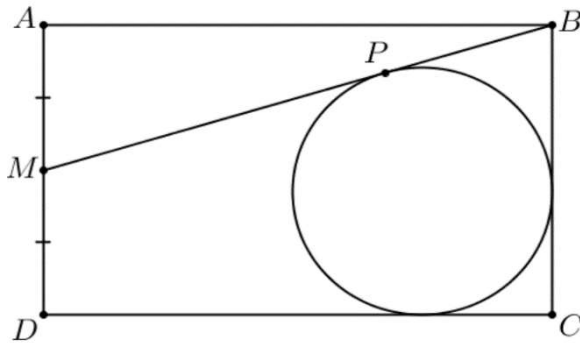


آزمون مرحله اول سی و هفتمین المپیاد

ریاضی کشور

۱۴. اگر $S(n)$ مجموع ارقام عدد n و $P(n)$ حاصل ضرب ارقام n باشد، چند عدد طبیعی مختلف n می توان یافت به طوری که:

$$S(n) + P(n) = n$$



۱۵. در مستطیل شکل روبه رو، M وسط ضلع AD است. دایره ای داخل مستطیل در نظر بگیرید به طوری که بر پاره خط های BC ، DC و MB مماس باشد و محل تماس آن با پاره خط MB را P بنامید. اگر $MP = AD$ باشد، نسبت طول به عرض مستطیل کدام است؟ (شکل دقیق نمی باشد.)

- (۱) $\frac{5}{4}$ (۲) ۲ (۳) $\frac{3}{2}$ (۴) $\frac{5}{2}$ (۵) ۳



۱۶. در یک عملیات امنیتی، ۵ نفر دستگیر شده اند. تعدادی از آن ها مجرم و تعدادی بی گناه اند. می دانیم افراد مجرم همواره دروغ گفته و افراد بی گناه همواره راست می گویند. اگر این ۵ نفر جملات زیر را گفته باشند دقیقاً چند مجرم داریم؟

- نفر اول: حداقل دو نفر از ما بی گناه است.
- نفر دوم: حداقل دو نفر از ما مجرم است.
- نفر سوم: همه بی گناه هستند.
- نفر چهارم: دقیقاً یک نفر از ما مجرم است.
- نفر پنجم: دقیقاً یک نفر از ما بی گناه است.

- (۱) ۱ (۲) ۲ (۳) ۳ (۴) ۴ (۵) ۵

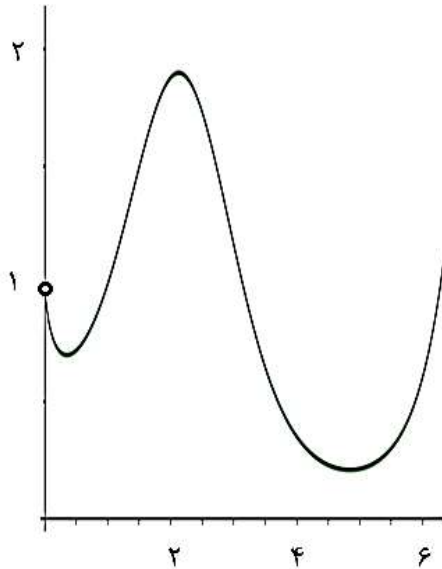
محل انجام محاسبات:



آزمون مرحله اول سی و هفتمین المپیاد ریاضی کشور

۱۷. شکل روبه‌رو مربوط به بخشی از نمودار

کدام یک از گزینه‌های زیر است؟



(۲) $(\cos(x))^x$

(۱) x^x

(۴) $(\sin(x))^{\sin x}$

(۳) $(\sin(x))^x$

(۵) $x^{\sin(x)}$

۱۸. در مثلث قائم الزاویه ABC ، زاویه B قائمه بوده و نقاط M و N به ترتیب بر روی پاره‌خط‌های AC و AB به گونه‌ای انتخاب شده‌اند که MN بر AC عمود باشد. محل تلاقی امتداد MN با امتداد ضلع BC را P می‌نامیم. می‌دانیم که PN برابر MN است. فرض کنید O وسط ضلع AC باشد. اگر طول MN و ON به ترتیب برابر ۲۰ و ۲۱ سانتی‌متر باشد، طول وتر مثلث قائم الزاویه ABC را بیابید. (جواب سوال عدد طبیعی است.)

۱۹. چند دنباله از اعداد طبیعی مانند $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ وجود دارد به طوری که دارای هر دو ویژگی زیر باشد؟

- $a_{n+1} = \frac{a_n^2}{a_{n-1}} \quad (n \geq 2)$
- $a_3 = 54000$

محل انجام محاسبات:



آزمون مرحله اول سی و هفتمین المپیاد

ریاضی کشور

۲۰. در کلاس ترکیبیات، آوا همه زیرمجموعه‌های ناتهی مجموعه $\{1, 2, \dots, 1397\}$ را بر روی تخته نوشت. وی در ادامه به جای هر زیرمجموعه میانگین اعضای آن را قرار می‌دهد. میانگین اعداد نوشته شده بر روی تخته چند است؟

۲۱. چند زوج مرتب حقیقی (a, b) وجود دارد به طوری که:

$$\begin{cases} (a+b)^2 = 2(a-b) \\ 3(a-b)^2 = 4ab \end{cases}$$

(۱) ۰ (۲) ۱ (۳) ۲ (۴) ۳ (۵) بی‌نهایت

۲۲. درون مثلث متساوی الساقین ABC ، $(AB = AC)$ نقطه P مفروض است. پای عمودهای P بر اضلاع AB ، AC و BC را به ترتیب X ، Y و Z می‌نامیم. می‌دانیم مقدار زاویه $\widehat{BAC}$ و $\widehat{XZY}$ به ترتیب 40° و 70° درجه می‌باشند. اگر $PX = 2PY = 4PZ$ باشد، طول PZ چقدر است؟

(۱) $\sqrt{3}$ (۲) $\sqrt{2}$ (۳) ۲ (۴) $\sqrt{6}$ (۵) $2\sqrt{2}$

۲۳. دانشکده علوم ریاضی دانشگاه شکرستان تعدادی استاد دارد که به ترتیب حروف الفبا به آن‌ها شماره‌های ۱، ۲، ۳ و ... داده شده است. رئیس دانشکده از اساتید خواسته که برای خود کدی شامل چهار عدد اول درست کنند. استاد شماره n باید اعداد $1, 2, 3, n$ را در نظر گرفته و سپس به جای هریک از این چهار عدد، یکی از عوامل اول آن را به دلخواه بنویسد. برای مثال اگر شماره استادی ۵۳ باشد، باید اعداد ۵۴، ۵۵، ۵۶ و ۵۷ را در نظر گرفته و می‌تواند این کد را انتخاب کند: ۳، ۵، ۷ و ۳ (او انتخاب‌های دیگری نیز دارد). می‌دانیم که اساتید به هر شکلی که کد خود را انتخاب کنند، کد هیچ دو استادی برابر نخواهد شد. این دانشکده حداکثر چند استاد دارد؟

محل انجام محاسبات:

😊 آزمون مرحله اول سی و هفتمین المپیاد
ریاضی کشور

۲۴. برای اعداد حقیقی a و b می‌دانیم $a \in [0, 3]$ و $b \in [1, 2]$. حداقل و حداکثر مقدار عبارت $a^2 - ab + b^2$ را به ترتیب، m و M می‌نامیم. مقدار جزء صحیح $[4(M - m)]$ چند خواهد بود؟

۲۵. چند تابع صعودی $f: \{1, 2, 3, 4, 5, 6\} \rightarrow \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ داریم، به طوری که برای هر $1 \leq i \leq 6$ داشته باشیم:

$$|f(i) - i| \leq 1$$

۱۴۴ (۱) ۱۶۴ (۲) ۸۹ (۳) ۳۲۴ (۴) ۱۲۸ (۵)