

سؤالات مرحله دوم المپیاد ریاضی سال ۱۳۹۶

روز اول

۱- در این سؤال منظور از (a, b) ، بزرگ‌ترین مقسوم‌علیه مشترک دو عدد a و b است.

الف) ثابت کنید دنباله $a_1, a_2, a_3, \dots$ و ... از اعداد طبیعی وجود ندارد که برای هر $i, j \in \mathbb{N}$ که $i < j$

$$(a_i + j, a_j + i) = 1$$

ب) گیریم p عددی اول و فرد باشد، ثابت کنید دنباله $a_1, a_2, a_3, \dots$ و ... از اعداد طبیعی وجود دارد به طوری که هیچ کدام از عبارات $(a_i + j, a_j + i)$ که $i < j$ بر p بخش‌پذیر نباشند.

۲- نقطه P دخل دوزنقه متساوی‌الساقین $ABCD$ ، که در آن $AB \parallel CD$ ، طوری انتخاب شده که $APB > ADC$ و $DPC > ABC$ ثابت کنید $AB + CD > AD - BC$.

۳- جدولی $n \times n$ داریم که n بر ۳ بخش‌پذیر است. می‌خواهیم برخی از خانه‌های جدول را سیاه کنیم با این شرط که در هر زیر جدول $m \times m$ از آن، که $m > 1$ ، تعداد خانه‌های سیاه از تعداد خانه‌های سفید بیش‌تر نباشد. حداکثر چند خانه را می‌توانیم سیاه کنیم؟

سؤالات مرحله دوم المپیاد ریاضی سال ۱۳۹۶

☆ روز دوم

گیریم x و y دو عدد حقیقی مثبت و متمایز باشند که $x^4 - y^4 = x - y$. ثابت کنید:

$$\frac{x-y}{x^6-y^6} \leq \frac{4}{3}(x+y).$$

۵- پنج کودک باهوش دور میزی دایره‌ای نشسته‌اند. مربی تعدادی سیب را بین آن‌ها تقسیم می‌کند و می‌گوید: «من به برخی از شما تعدادی سیب داده‌ام و تعداد سیب هیچ دو نفری برابر نیست. هرکس علاوه بر این که تعداد سیب‌های خودش را می‌داند، سیب‌های دو نفری که در چپ و راستش هستند را هم می‌بیند.» سپس او تعداد کل سیب‌ها را اعلام می‌کند و از هر کس می‌خواهد که اختلاف تعداد سیب دو نفر روبه‌رویی خود را بگوید.

الف. ثابت کنید اگر تعداد سیب‌ها کم‌تر از ۱۶ باشد، دست‌کم یکی از کودکان می‌تواند با استدلال جواب درست را به دست آورد.

ب. نشان دهید اگر تعداد سیب‌ها ۱۶ باشد، مربی می‌تواند سیب‌ها را طوری تقسیم کند که هیچ کودکی نتواند جواب سؤال مربی را با اطمینان بفهمد.

۶- X را نقطه‌ای متغیر روی دایره محیطی مثلث ABC می‌گیریم. از X بر AB و AC دو عمود رسم می‌کنیم تا خط‌گذرنده از BC را به ترتیب P و Q قطع کنند. مرکز دایره‌گذرنده از X ، P و Q را Y می‌نامیم. (اگر X ، P و Q بر هم منطبق باشند همان نقطه را Y می‌گیریم.)

الف. ثابت کنید اگر مثلث ABC متساوی‌الاضلاع باشد، با تغییر X روی دایره محیطی، Y روی یک دایره حرکت می‌کند.

ب. عکس قسمت الف را ثابت کنید: اگر با تغییر X روی دایره محیطی، Y روی یک دایره حرکت کند، مثلث ABC متساوی‌الاضلاع است.