

سؤالات مرحله دوم المپیاد ریاضی سال ۱۴۰۱

۱- مثلث ABC را در نظر بگیرید. نقاط D و E را به ترتیب روی اضلاع AC و AB در نظر بگیرید به گونه‌ای که $DE \parallel BC$. حال خطی به نام L از A موازی با BC رسم می‌کنیم و قرینه D و E را نسبت به آن به ترتیب D' و E' می‌نامیم. ثابت کنید که E'C و D'B و L هم‌رسمند.

۲- همه تابع‌های $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ را بیابید که برای هر دو عدد حقیقی x و y داشته باشیم:

$$f(xf(y) + f(x) + y) = xy + f(x) + f(y)$$

۳- خانه‌های یک جدول $n \times n$ به صورت شطرنجی سیاه و سفید شده‌اند. به ازای چه n‌هایی می‌توان خانه‌های جدول را با اعداد $1, 2, 3, \dots, n$ به گونه‌ای پر کرد که هر دو شرط زیر برقرار باشد:

الف) در هر سطر تمامی اعداد $1, 2, 3, \dots, n$ آمده باشد و مجموع اعداد خانه‌های سیاه آن سطر با مجموع اعداد خانه‌های سفیدش برابر باشد.

ب) در هر ستون تمامی اعداد $1, 2, 3, \dots, n$ آمده باشد و مجموع اعداد خانه‌های سیاه آن ستون با مجموع اعداد خانه‌های سفیدش برابر باشد.

۴- در یک جدول $n \times n$ بعضی از خانه‌ها سیاه شده‌اند و بقیه سفید هستند. دو نسخه از این جدول تهیه می‌کنیم و به امین و علی هر کدام یک نسخه می‌دهیم. امین و علی در اتاق‌های جداگانه، در تلاش برای قرمز کردن همه خانه‌های جدول خود هستند.

روش امین به این صورت است که در هر مرحله (در صورت وجود) خانه‌ای پیدا می‌کند که در سطر خود تنها خانه سیاه باشد، سپس ستون مربوط به آن خانه را به طور کامل قرمز می‌کند.

روش علی به این صورت است که در هر مرحله (در صورت وجود) خانه‌ای پیدا می‌کند که در ستون خود تنها خانه سیاه باشد، سپس سطر مربوط به آن را به طور کامل قرمز می‌کند.

ثابت کنید امین در نهایت موفق می‌شود همه خانه‌های جدولش را قرمز کند اگر و تنها اگر علی هم موفق شود همه خانه‌های جدولش را قرمز کند.

سؤالات مرحله دوم المپیاد ریاضی سال ۱۴۰۱

۵- دنباله $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ از اعداد حقیقی به این صورت تعریف می‌شود که $a_1 = 2$ و برای هر $n \geq 1$ داریم:

$$a_{n+1} = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n \times a_n$$

ثابت کنید بی‌نهایت عدد طبیعی n وجود دارد که $\frac{1}{n+1} \times a_n \times a_{n-1} \times \dots \times a_1$ عددی طبیعی و مربع کامل است.

۶- در مثلث متساوی‌الساقین ABC ، $(BA = BC)$ نقطه P روی ارتفاع رأس B به صورت دلخواه انتخاب شده است. فرض کنید دایره APB خط AC را برای بار دوم در M قطع می‌کند. قرینه M نسبت به وسط AC را N می‌نامیم. خط NP دایره APB را در نقطه X ($X \neq P$) و خط AB دایره APN را در نقطه Y ($Y \neq A$) قطع می‌کند. مماس در A بر دایره APN ، در نقطه Z با خط BP برخورد می‌کند. ثابت کنید که CZ بر دایره محیطی مثلث PXY مماس است.