



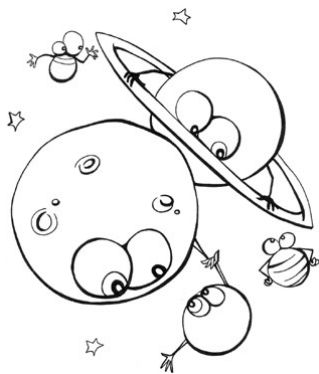
آزمون مرحله اول بیست و هشتمین المپیاد ریاضی کشور

۱. دایره‌ای به شعاع واحد در نظر بگیرید. مساحت این دایره به مساحت چند مثلث متساوی الاضلاع به ضلع واحد نزدیک‌تر است؟

- الف) ۶ (ب) ۷ (ج) ۸ (د) ۹ (ه) ۱۰

۲. فرض کنید حاصل ضرب همه اعداد داخل جدول ضرب 10×10 برابر n باشد. بزرگ‌ترین عدد m که $\sqrt[m]{n}$ عددی طبیعی باشد چند است؟

- الف) ۲ (ب) ۱۰ (ج) ۱۱ (د) ۲۰ (ه) ۴۰



۳. دانش‌مندان، منظومه‌ای در کهکشان راه شیری کشف کرده‌اند که دارای یک ستاره، ۹ سیاره و ۱۲۲ قمر است و هر سیاره آن دست‌کم یک قمر دارد. تحقیقات نشان می‌دهد که جرم ستاره برابر $1.98 \times 10^{30} \text{ kg}$ است و مجموع جرم سیاره‌ها برابر جرم ستاره و مجموع جرم قمرهای هر سیاره برابر جرم آن سیاره است. میانگین جرم اجرام این منظومه چه قدر است؟

- الف) $1.5 \times 10^{28} \text{ kg}$ (ب) $4.5 \times 10^{28} \text{ kg}$ (ج) $6.6 \times 10^{28} \text{ kg}$ (د) $5.94 \times 10^{28} \text{ kg}$ (ه) اطلاعات موجود کافی نیست.

۴. چهار میله به طول‌های ۵، ۳، ۷ و ۴ متر به همین ترتیب به هم لولا شده‌اند و ابتدای میله اول هم به انتهای میله چهارم لولا شده است. اگر میله‌ها بتوانند آزادانه در یک صفحه حول لولاهایشان بچرخند، فاصله لولای بین میله‌های ۵ متری و ۴ متری تا لولای مقابل چند متر می‌تواند باشد؟

- الف) هر مقدار بین ۳ و ۸ متر (ب) هر مقدار بین ۲ و ۱۱ متر (ج) هر مقدار بین ۲ و ۸ متر (د) هر مقدار بین ۳ و ۱۱ متر (ه) هر مقدار بین ۲ و ۳ متر و هر مقدار بین ۸ و ۱۱ متر

۵. یک امتحان ۱۰۰ نمره‌ای از دانش‌آموزان دو کلاس الف و ب گرفته شده است. هر کلاس ۵۰ دانش‌آموز دارد. پس از اعلام نتایج، مشخص شد که میانگین نمرات کلاس الف از میانگین نمرات کلاس ب بیشتر است. حداکثر چند دانش‌آموز در کلاس ب هستند که نمره آن‌ها از همه دانش‌آموزان کلاس الف بیشتر است؟

- الف) ۱ (ب) ۲۵ (ج) ۴۹ (د) ۵۰

(ه) امکان ندارد دانش‌آموزی از کلاس ب، نمره‌اش از همه دانش‌آموزان کلاس الف بیشتر باشد.



آزمون مرحله اول بیست و هشتمین المپیاد ریاضی کشور



۶. مهندس ناظر تونل توحید در اولین شبانه بعد از آغاز کار از پروژه تونل توحید بازدید کرده است. از آن روز به بعد برنامه بازدید وی از تونل به این شکل بوده است: فردای همان روز، یعنی یکشنبه، از پروژه مجدداً بازدید کرده و در ادامه هر بار یک روز به فاصله بین بازدیدها اضافه کرده است. صدمین بازدید در چه روزی از هفته انجام شده است؟

الف) شبانه ب) یکشنبه ج) دوشنبه د) سه‌شنبه ه) چهارشنبه

۷. شخصی در اصفهان زندگی می‌کند و می‌خواهد از سه شهر تبریز، مشهد مقدس و یزد دیدن کند و به شهر اصفهان باز گردد به طوری که در هر یک از این سه شهر یک شب بماند. وسایل نقلیه بین این سه شهر اتوبوس، قطار و هواپیما است. اتوبوس و قطار هر روز و هواپیما تنها در روزهای زوج موجود است. اگر این شخص سفر خود را در روز شبانه آغاز کند، به چند حالت می‌تواند این سفر را انجام دهد؟ (توجه کنید که این شخص به هر ترتیبی می‌تواند به این سه شهر سفر کند.)

الف) ۳۶ ب) ۷۲ ج) ۱۰۸ د) ۱۲۰ ه) ۲۱۶

۸. چند عدد ۸ رقمی وجود دارد که حاصل ضرب ارقامش ۹۸۰۰ باشد؟

الف) ۱۶۸۰ ب) ۵۰۴۰ ج) ۸۴۰۰ د) ۱۰۰۸۰ ه) ۱۲۰۹۶۰

۹. فرض کنید a عددی گنگ باشد. کدام یک از گزاره‌های زیر لزوماً درست است؟

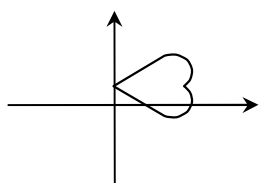
الف) دست‌کم یکی از a^3 و $a^4 - 1$ گنگ است. ب) دست‌کم یکی از $a^3 - 1$ و a^6 گنگ است.
ج) دست‌کم یکی از a^2 ، a^3 و a^5 گویا است. د) a^2 و $a^3 - 1$ گنگ هستند.
ه) حداکثر یکی از $a^3 + 1$ و a^4 گنگ است.

۱۰. تعداد اعداد طبیعی بین ۵۰۰۰ و ۱۰۰۰۰ که عامل اولی به غیر از ۲ و ۳ نداشته باشد چند تاست؟

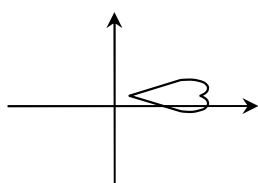
الف) ۶ ب) ۹ ج) ۱۴ د) ۲۰ ه) ۸۳۳



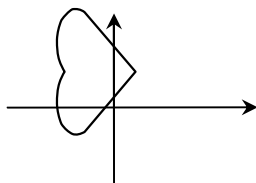
آزمون مرحله اول بیست و هشتمین المپیاد ریاضی کشور



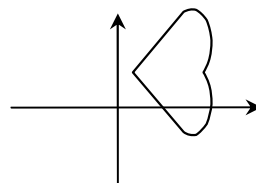
۱۱. تابعی دومتغیره است و شکل روبه‌رو مجموعه نقاط $f(x, y) = 0$ در صفحه است که $f(x, y) = 0$ مجموعه نقاط (x, y) که $f(1-x, 2y) = 0$ کدام گزینه است؟



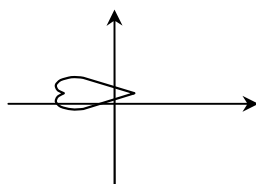
(الف)



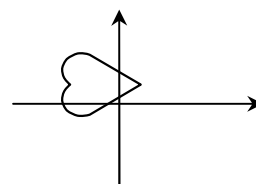
(ب)



(ج)



(د)



(ه)

۱۲. ظرفی مکعب شکل به ضلع ۶ سانتی‌متر را تا نصفه پر از آب کرده‌ایم. اگر این ظرف را به آرامی طوری کج کنیم که یک ضلع کف روی زمین باقی بماند و کف آن با زمین زاویه ۶۰ درجه بسازد، چند سانتی‌متر مکعب آب بیرون می‌ریزد؟

(الف) $10.8 - 36\sqrt{3}$

(ب) $216 - 12\sqrt{3}$

(ج) $10.8 - 9\sqrt{3}$

(د) $216 - 18\sqrt{3}$

(ه) اصلاً آبی نمی‌ریزد.

۱۳. معادله $y^3 - 2x^2 = 1388$ در مجموعه اعداد صحیح چند جواب دارد؟

(الف) ۰

(ب) ۱

(ج) ۲

(د) ۳

(ه) بی‌نهایت

۱۴. چند عدد چهار رقمی وجود دارد که هر رقم آن از رقم سمت چپش کوچک‌تر باشد و اگر ترتیب ارقام آن را برعکس کنیم، تفاضل این دو عدد ۶۱۷۴ شود؟

(الف) ۱

(ب) ۸

(ج) ۱۰

(د) ۱۲

(ه) ۲۱

۱۵. فرض کنید مقدار تابع $f(x) = -x^2 + bx + c$ همواره کم‌تر یا مساوی ۲ باشد. اگر این تابع دو ریشه حقیقی داشته باشد، فاصله ریشه‌های آن حداکثر چه قدر است؟

(الف) ۲

(ب) ۴

(ج) ۸

(د) $\sqrt{2}$

(ه) $2\sqrt{2}$



آزمون مرحله اول بیست و هشتمین المپیاد ریاضی کشور

۱۶. می‌گوییم یک عدد در مبنای a کاهشی است در صورتی که اگر آن را در مبنای a بنویسیم، هیچ رقمی از رقم سمت چپ خود بزرگ‌تر نباشد. چند عدد طبیعی کوچک‌تر از ۱۰۲۴ وجود دارد که هم در مبنای ۲ و هم در مبنای ۴ کاهشی باشد؟

الف) ۱۰ (ب) ۳۰ (ج) ۳۵ (د) ۴۰ (ه) ۵۵

۱۷. چند زوج مرتب (x, y) از اعداد طبیعی کوچک‌تر از ۱۰۱ وجود دارد که $۲x + ۷y$ بر $x + y$ بخش‌پذیر باشد؟

الف) ۵۰ (ب) ۷۸ (ج) ۱۰۰ (د) ۱۱۶ (ه) ۲۰۰

۱۸. ضلع AB ، از مثلث ABC را از طرف B به اندازه خودش تا P ادامه می‌دهیم. ضلع AC را هم از طرف C به اندازه دو برابر خودش تا نقطه Q امتداد می‌دهیم. اگر M وسط PQ باشد، مساحت مثلث MBC چند برابر مساحت مثلث ABC است؟

الف) ۱ (ب) $۱/۲۵$ (ج) $۱/۵$ (د) $۱/۷۵$ (ه) ۲

۱۹. می‌خواهیم اعداد ۱ تا ۱۰ را، بدون تکرار، در جدول زیر بنویسیم به طوری که هر عدد هم از عدد سمت راستش و هم از عدد پایینش کوچک‌تر باشد. این کار به چند طریق ممکن است؟

الف) ۳۴ (ب) ۳۵ (ج) ۳۶

د) ۴۴ (ه) ۴۵

۲۰. فرض کنید عدد طبیعی n روی تخته‌سیاه نوشته شده است. این عدد را پاک می‌کنیم و به جای آن عدد $۲^a - ۲^b + n$ را می‌نویسیم که در آن a بزرگ‌ترین عددی است که n به ۲^a بخش‌پذیر است و b کوچک‌ترین عددی است که $n < ۲^b$. اگر در ابتدا عدد ۴۲ نوشته شده باشد بعد از ۱۱۳ بار انجام این کار چه عددی روی تخته خواهد بود؟

الف) ۷×۲^{۱۱۶} (ب) $۲^{۱۱۷} - ۱۸۴$ (ج) ۹×۲^{۱۱۷}

د) $۲^{۱۱۳} + ۴۲$ (ه) $۲^{۱۱۸} - ۱۸۴$



آزمون مرحله اول بیست و هشتمین المپیاد ریاضی کشور

۲۱. فرض کنید ABC یک مثلث قائم الزاویه متساوی الساقین باشد که AB وتر آن است. مورچه‌ای داخل مثلث است. وی ابتدا به سمت نقطه A می‌رود تا جایی که فاصله‌اش تا آن نقطه نصف شود. سپس به سمت نقطه B می‌رود تا جایی که فاصله‌اش تا آن نقطه نصف شود و این دو حرکت را متناوباً تکرار می‌کند. بعد از ۲۰ مرحله انجام این کار مورچه به کدام نقطه نزدیک‌تر است؟
الف) A (ب) B (ج) C (د) وسط وتر AB (ه) بستگی به مکان اولیه مورچه دارد.



۲۲. در یک ستون ۲۵۷ سرباز ایستاده‌اند. فرمانده دستور می‌دهد که نفراتی که در مکان‌های فرد قرار گرفته‌اند به همان ترتیب از صف خارج شوند، نفرات دیگر با حفظ ترتیب جای آن‌ها را پر کنند و در نهایت نفرات از صف خارج‌شده به همان ترتیب به انتهای صف بروند. اگر فرمانده ۴۱ مرتبه دیگر این دستور را تکرار کند سربازی که در نهایت نفر اول صف شده در ابتدا نفر چندم بوده است؟

الف) ۱ (ب) ۱۶ (ج) ۱۲۸ (د) ۲۵۳ (ه) ۲۵۵

۲۳. به چند صورت می‌توان یک چندجمله‌ای از درجه پنج ساخت که ضرایب آن، با ترتیبی دل‌خواه، اعداد ۱، ۲، ۳ و... ۶ باشد و به علاوه به چندجمله‌ای $1 + x + x^2$ بخش پذیر باشد؟ (بخش پذیر بودن یک چندجمله‌ای به چندجمله‌ای $1 + x + x^2$ یعنی آن را بتوان به صورت ضرب چندجمله‌ای $1 + x + x^2$ و یک چندجمله‌ای دیگر نوشت).

الف) ۱ (ب) ۴۸ (ج) ۱۲۰ (د) ۳۶۰ (ه) چنین چندجمله‌ایی وجود ندارد.

۲۴. بزرگ‌ترین عدد حقیقی k را بیابید که برای هر عدد مثبت a با شرط $a - \frac{1}{a} \geq 1$ داشته

$$a^3 - \frac{1}{a^3} \geq k\left(a - \frac{1}{a}\right)$$

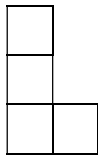
الف) ۲ (ب) $\sqrt{3}$ (ج) ۴ (د) $4\sqrt{3}$ (ه) ۵

۲۵. توپی به شعاع ۲۰ سانتی‌متر روی سطح زمین قرار دارد. بالاترین نقطه توپ را علامت می‌زنیم. پس از آن توپ را به اندازه 25π سانتی‌متر به سمت شرق و سپس به اندازه 25π سانتی‌متر به سمت شمال می‌غلطانیم. در نهایت ارتفاع علامت از سطح زمین چند سانتی‌متر است؟

الف) $20 - 10\sqrt{2}$ (ب) ۲۰ (ج) $20 + 5\sqrt{2}$ (د) $20 + 10\sqrt{2}$ (ه) ۳۰



آزمون مرحله اول بیست و هشتمین المپیاد ریاضی کشور



۲۶. به چند طریق می‌توان جدول ۱۳۸۸×۱۳۸۸ را با اعداد ۱ تا ۶ پر کرد به طوری که اگر کاشی به شکل روبه‌رو را بر روی چهار خانه از جدول قرار دهیم، مجموع ۴ عدد زیر کاشی مضربی از ۶ باشد؟ (کاشی را می‌توان چرخاند یا پشت و رو کرد).

الف) ۸ ب) ۱۰ ج) ۱۲ د) ۱۶ ه) ۲۰

۲۷. کدام گزینه دربارهٔ سه عدد زیر صحیح است؟ در عبارتی که برابر A است ۵۰۰ بار ۲ و ۵۰۰ بار ۴ ظاهر شده است و در عبارتی که برابر B است نیز همین طور است. در عبارتی که برابر C است ۲۰۰۰ بار ۲ ظاهر شده است.

$$C = ۲^{۲۰۰۰ \cdot ۲} \text{ و } B = ۴^{۲۰۰۰ \cdot ۲}, A = ۲^{۴۰۰۰ \cdot ۴}$$

الف) $A > B > C$ ب) $B > A > C$ ج) $C > A > B$ د) $C > B > A$ ه) $B > C > A$

۲۸. در چهارضلعی محدب $ABCD$ ، $\widehat{DAB} = ۱۱^\circ$ ، $\widehat{BCD} = ۱۲۵^\circ$ و $AB = AD = ۶$. طول قطر AC چه قدر است؟

الف) ۵ ب) $۵/۵$ ج) ۶ د) $۶/۵$ ه) اطلاعات کافی نیست.

۲۹. یک جورچین (پازل) ساده از ۱۰ قطعهٔ مربعی شکل تشکیل شده است که باید در یک ردیف در کنار هم قرار بگیرند تا تصویری مشخص را درست کنند. فرض کنید مکان‌های سوم و هشتم به‌درستی پر شده است و از این به بعد در هر مرحله تنها مجازیم قطعه‌ای را سر جایش قرار دهیم که دست‌کم یکی از قطعات مجاورش قبلاً جای‌گذاری شده باشد. به چند روش مختلف می‌توان ۸ قطعهٔ باقی‌مانده را سر جایشان گذاشت؟

الف) ۱۶۸۰ ب) ۳۳۶۰ ج) ۴۲۰۰ د) ۵۰۴۰ ه) ۱۰۰۸۰

۳۰. حداکثر چند دایره در فضا می‌توان قرار داد به طوری که هر دو تا هم‌دیگر را در دو نقطه قطع کنند، هیچ سه تایی از یک نقطه عبور نکنند و هیچ دو تایی در یک صفحه قرار نداشته باشند؟

الف) ۳ ب) ۴ ج) ۶ د) ۱۲ ه) بی‌نهایت