

سؤالات مرحله دوم المپیاد ریاضی سال ۱۳۹۲

✧ روز اول

۱- در دوزنقه متساوی الساقین ABCD (که در آن $BC = AD$ و $AB \parallel CD$) نقطه P محل برخورد قطرهایست و دایره محیطی مثلث APB، BC را در X قطع می کند. خط گذرا از D و موازی با BC، AX را در Y قطع می کند. ثابت کنید:

$$\angle YDA = 2 \times \angle ACY$$

۲- فرض کنید n عدد حقیقی متمایز روی تخته نوشته شده است. به جای این اعداد، اختلاف دویه دوی آنها را می نویسیم. ثابت کنید اگر n فرد باشد، $\binom{n}{2}$ عدد مثبت به دست آمده را می توان به دو دسته تقسیم کرد که مجموع اعداد دو دسته با هم برابر باشد.

۳- فرض کنید $a > k$ دو عدد طبیعی هستند. دو دنباله اکیداً صعودی $r_1 < r_2 < \dots < r_n$ و $s_1 < s_2 < \dots < s_n$ از اعداد طبیعی دارای این خاصیت هستند که

$$(a^{r_1} + k)(a^{r_2} + k) \dots (a^{r_n} + k) = (a^{s_1} + k)(a^{s_2} + k) \dots (a^{s_n} + k)$$

ثابت کنید این دو دنباله برابر هستند، یعنی به ازای هر i داریم $r_i = s_i$.

✧ روز دوم

۴- همه توابع $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ را بیابید که برای هر $x, y \in \mathbb{R}$ داشته باشیم

$$f(x+y)f(x^2-xy+y^2) = x^3 + y^3$$

سؤالات مرحله دوم المپیاد ریاضی سال ۱۳۹۲

۵- لامپ‌های سالن اجتماعات اداره‌ای با ۵ کلید روشن و خاموش می‌شوند؛ هر کلید به یک یا چند لامپ متصل است و با تغییر وضعیت هر کلید، وضعیت لامپ‌های متصل به آن تغییر می‌کند. می‌دانیم که مجموعه لامپ‌های متصل به هر دو کلید، متفاوت است. ثابت کنید اگر در ابتدا همه لامپ‌ها خاموش باشند، ۳ کلید وجود دارد که با تغییر وضعیت همه آن‌ها، دست‌کم ۲ لامپ روشن می‌شود.

۶- دو دایره w_1 و w_2 یکدیگر را در نقاط P و Q قطع می‌کنند. خطی دلخواه که از P می‌گذرد w_1 و w_2 را به ترتیب در A و B قطع می‌کند. خطی موازی با AB رسم می‌کنیم تا w_1 را در D و F و w_2 را در C و E قطع کند به طوری که E و F بین C و D باشند. محل تقاطع BE و AD را X ، محل تقاطع AF و BC را Y و قرینه P نسبت به CD را R می‌نامیم.

الف) ثابت کنید R روی XY قرار دارد.

ب) ثابت کنید PR نیمساز زاویه $\angle XPY$ است.