

سؤالات مرحله دوم المپیاد ریاضی سال ۱۳۹۹

روز اول

۱- فرض کنید S مجموعه‌ای n عضوی است. می‌خواهیم مجموعه همه زیرمجموعه‌های S را به m دسته افراز کنیم به نحوی که هرگاه A, B و $A \cup B$ در یک دسته باشند آنگاه $A = B$. حداقل مقدار m را بیابید. (منظور از افراز یک مجموعه به تعدادی دسته این است که هر عضو مجموعه در دقیقاً یک دسته قرار داشته باشد).

۲- اعداد حقیقی و مثبت x, y و z با شرط $x + y + z = 1399$ مفروض‌اند. بیشترین مقدار عبارت

$$[x]y + [y]z + [z]x$$

چقدر است؟ (منظور از $[x]$ بزرگترین عدد صحیحی است که از x بزرگ‌تر نیست).

۳- دایره ω_1 با مرکز O_1 مفروض است. دایره ω_2 به مرکز O_2 از نقطه O_1 می‌گذرد و ω_1 را در نقاط A و B یکدیگر قطع می‌کند. خطی که از A می‌گذرد و بر ω_1 مماس است را l می‌نامیم. دایره‌ای که از O_1 و O_2 می‌گذرد و مرکز آن روی l قرار دارد، ω_3 را برای بار دوم در P قطع می‌کند. ثابت کنید قرینه P نسبت به l روی دایره ω_1 قرار دارد.

سؤالات مرحله دوم المپیاد ریاضی سال ۱۳۹۹

روز دوم

۱- مجموعه S با تعداد اعضای n مفروض است. می‌خواهیم تمام زیرمجموعه‌های S را به k دسته افراز کنیم به‌طوری‌که اگر در یک دسته مجموعه‌های $A, B, A \cup B$ باشند، آنگاه $A = B$. حداقل تعداد دسته‌های لازم را پیدا کنید.

۲- فرض کنید x, y, z حقیقی مثبت هستند به‌طوری‌که $x + y + z = 1399$. بیشترین مقدار عبارت $[x]y + [y]z + [z]x$ را بیابید.

۳- دایره ω_1 با مرکز O_1 مفروض است. دایره ω_2 با مرکز O_2 از نقطه O_1 می‌گذرد و دو دایره در نقاط A, B یکدیگر را قطع می‌کنند. خط مماس بر دایره ω_1 در نقطه A را l می‌نامیم. دایره‌ای که مرکز آن روی خط l بوده و از نقاط O_1, O_2 می‌گذرد، دایره ω_3 را برای بار دوم در P قطع می‌کند. ثابت کنید قرینه P نسبت به l روی دایره ω_1 قرار می‌گیرد.

۴- دو دایره ω_1, ω_2 در نقاط A, B تقاطع دارند. نقطه X روی ω_1 و نقطه Y روی ω_2 طوری قرار دارند که XY بر دو دایره مماس است و خط XY به B نزدیک‌تر از A است. اگر قرینه B نسبت به X و Y را به ترتیب C و D بنامیم. ثابت کنید:

$$\angle CAD < 90^\circ$$

۵- دو تایی a, b از اعداد طبیعی را مربع‌ساز می‌گوییم هرگاه $ab + 1$ مربع کامل باشد. تمام n های طبیعی را بیابید که مجموعه $\{1, 2, \dots, 2n\}$ را بتوان به دو تایی‌های مربع‌ساز افراز کرد.

سؤالات مرحله دوم المپیاد ریاضی سال ۱۳۹۹

۶- دایره‌ای را به $2n$ قطاع مساوی تقسیم کرده‌ایم. می‌خواهیم روی هر یک از آن‌ها یکی از اعداد $0, 1, 2, \dots, n-1$ را بنویسیم به طوری که:

- هر عدد دقیقاً دو بار استفاده شود.
- برای هر عدد طبیعی $0 \leq i \leq n-1$ ، بین هر دو قطاع با شماره i ، از یک طرف، دقیقاً i قطاع دیگر وجود داشته باشد.

ثابت کنید این کار برای $n = 1399$ امکان‌پذیر نمی‌باشد.

