



مبارزه علمی برای جوانان، زنده کردن روح جست و جو و کشف واقعیت هاست. «امام خمینی (ره)»

دفترچه سؤالات مرحله اول سال ۱۴۰۳

چهل و سومین دوره المپیاد ریاضی

مدت آزمون	تعداد سؤالات	
	کوتاه پاسخ	پنج گزینه ای
۲۱۰ دقیقه	۱۶	۹

نام:	نام خانوادگی:	شماره صندلی:
------	---------------	--------------

استفاده از هر نوع ماشین حساب ممنوع است.

توضیحات مهم

- ۱- بلافاصله پس از آغاز آزمون، تعداد سؤالات داخل دفترچه و همه برگه های دفترچه سؤالات را بررسی نمایید، در صورت هر گونه نقصی در دفترچه، در اسرع وقت مسئول جلسه را مطلع کنید.
- ۲- یک برگ پاسخ برگ در اختیار شما قرار گرفته که مشخصات شما بر روی آن نوشته شده است، در صورت نادرست بودن آن، در اسرع وقت مسئول جلسه را مطلع کنید. ضمناً مشخصات خواسته شده در پایین پاسخ برگ را با مداد مشکی بنویسید.
- ۳- برگه پاسخ برگ را دستگاه تصحیح می کند، پس آن را تا نکنید و تمیز نگه دارید و به علاوه، پاسخ هر پرسش را با مداد مشکی نرم در محل مربوط علامت بزنید. لطفاً خانه مورد نظر را کاملاً سیاه کنید.
- ۴- دفترچه سوال باید همراه پاسخ برگ تحویل داده شود.
- ۵- سوالات به دو شکل پاسخ کوتاه و پنج گزینه ای هستند، پاسخ درست هر سوال ۴ نمره مثبت و پاسخ نادرست به هر سوال پنج گزینه ای ۱ نمره منفی دارد. پاسخ نادرست به سوال های پاسخ کوتاه نمره منفی ندارد.
- ۶- شرکت کنندگان در دوره تابستانی از بین دانش آموزان دهم و یازدهم انتخاب می شوند.

آزمون مرحله اول چهل و دومین المپیاد ریاضی

دانش‌آموز عزیز، سوال‌های این آزمون به دو شکل پنج‌گزینه‌ای و پاسخ کوتاه است. پاسخ درست به هر دو نوع سوال ۴ نمره مثبت دارد. پاسخ غلط به هر سوال پنج‌گزینه‌ای ۱ نمره منفی دارد ولی پاسخ غلط به سوالات پاسخ کوتاه نمره منفی ندارد. پاسخ‌نامه در مورد هر دو نوع سوال مشابه و دارای چهار ستون است که در هر کدام می‌توانید یکی از ارقام صفر تا نه را با سیاه کردن مشخص کنید.

جواب سوال‌های پاسخ کوتاه عددی نامنفی است. شما باید ارقام یکان، دهگان، صدگان و هزارگان قسمت صحیح آن را جداگانه در پاسخ‌نامه سیاه کنید، به عنوان مثال اگر پاسخ ۶۹۵ باشد، شما باید در پاسخ‌نامه، مانند شکل روبرو، رقم‌های مربوطه را سیاه کنید.

سوال شماره ۸			
یکان	دهگان	صدگان	هزارگان
۰	۰	۰	۰
۱	۱	۱	۱
۲	۲	۲	۲
۳	۳	۳	۳
۴	۴	۴	۴
۵	۵	۵	۵
۶	۶	۶	۶
۷	۷	۷	۷
۸	۸	۸	۸
۹	۹	۹	۹

در مورد سوال‌های پنج‌گزینه‌ای، شماره گزینه درست را در ستون سمت راست، مربوط به رقم یکان، سیاه کنید.

هم‌چنین در انتهای برخی سوالات پاسخ کوتاه بخشی به عنوان اطمینان از پاسخ قرار داده شده است که با علامت ♣ نمایش داده خواهد شد. این بخش خاصیتی از جواب را مطرح کرده و صرفاً به دلیل جلوگیری از اشتباهات محاسباتی احتمالی است. توجه کنید تمام شکل‌های کشیده شده در سوالات نادقیق هستند.

۱. عددی طبیعی را «مقارن» گوئیم اگر دنباله ارقام آن از چپ به راست و از راست به چپ یکسان باشد. مثلاً ۲۰۰۲ و ۱۹۱ مقارن هستند. حداقل چند عدد مقارن را باید جمع کنیم تا حاصل عدد ۱۴۰۳ شود؟

۲. یک کیف به یک قفل رمزدار سه رقمی مجهز است و قفل آن ایرادی دارد که باعث شده است وقتی دو رقم از ارقام قفل با دورقم از ارقام رمز درست، با در نظر گرفتن جایگاه، مطابقت دارد باز شود. به عنوان مثال اگر رمز درست ۱۹۹ باشد و ما عدد ۹۲۹ را وارد کنیم باز نمی‌شود ولی اگر ۱۸۹ را وارد کنیم باز می‌شود. با یک بار امتحان کردن این قفل به چه احتمالی قفل باز می‌شود؟

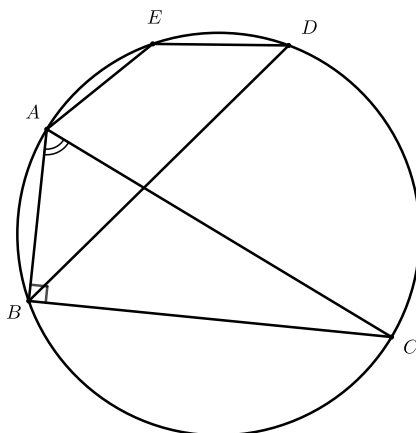
$$\frac{27}{1000} \quad (۲) \quad \frac{28}{1000} \quad (۳) \quad \frac{3}{100} \quad (۴) \quad \frac{729}{1000} \quad (۵) \quad \frac{727}{1000}$$

۳. عددهای طبیعی متمایز و بزرگتر از یک و کمتر از ده a, z, e, r را در نظر بگیرید که در شرایط زیر صدق می‌کنند:

$$r \mid 98, e \mid 105, z \mid 100, a \mid 91$$

همچنین عددها دو به دو نسبت به هم اولند. مقدار $\overline{reza}$ را بیابید. (منظور از $\overline{reza}$ یعنی عددی چهار رقمی که ارقام آن از سمت راست به ترتیب a, z, e, r هستند و $r \mid 98$ یعنی عدد ۹۸ بر r بخش پذیر است.)

۴. در شکل زیر می‌دانیم زاویه $\angle ABC$ برابر با 90° درجه است و $BC = BD$ و $AB = AE = ED$. دو برابر زاویه $\angle BAC$ چند درجه است؟



۱۵۵° (۵)

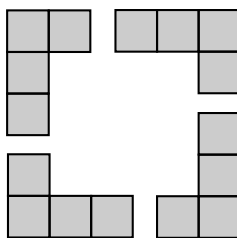
۱۴۵° (۴)

۱۳۵° (۳)

۱۳۰° (۲)

۱۲۵° (۱)

۵. در یک جدول 10×3 حداکثر چند قطعه مانند قطعات نشان داده شده در شکل زیر را که هرکدام از ۴ مربع به ضلع واحد تشکیل شده‌اند می‌توان قرار داد به طوری که با هم به جز در مرز، همپوشانی نداشته باشند؟ (قطعات بدون چرخش یا قرینه کردن گذاشته می‌شوند).



۶. اعداد حقیقی مثبت x, y, z در معادله زیر صدق کرده‌اند. عدد $x + y - 2z$ چند مقدار متفاوت می‌تواند به خود بگیرد؟ (منظور از $[x]$ ، جزء صحیح x یعنی بزرگترین عدد صحیحی که از x بیشتر نباشد و منظور از $\{x\}$ جزء اعشاری x یعنی $x - [x]$ می‌باشد).

$$[x] + \{y\}^2 = [y] + \{z\}^2 = [z] + \{x\}^2$$

۷. تونلی به شکل نیم‌دایره احداث شده است. این تونل سه خط عبور برای عبور ماشین‌ها دارد که هرکدام از خطوط عبور به عرض ۲ متر هستند و ماشین‌هایی به ارتفاع حداکثر ۴ متر می‌توانند از همه این خطوط وارد تونل شوند. حداقل شعاع این تونل نیم‌دایره شکل را محاسبه کنید.

۸. در کدام یک از گزینه‌های زیر مربع عدد $۹۸۷,۶۵۴,۳۲۱$ نوشته شده است؟ (از , به عنوان جداکننده هر سه رقم استفاده شده است تا به خواندن اعداد کمک کند).

(۱) $۹۷۵,۴۶۱,۰۵۱,۷۸۹,۹۷۱,۰۴۱$

(۲) $۹۷۵,۴۶۱,۰۵۳,۷۸۹,۹۷۱,۰۴۱$

(۳) $۹۷۵,۴۶۱,۰۵۵,۷۸۹,۹۷۱,۰۴۱$

(۴) $۹۷۵,۴۶۱,۰۵۷,۷۸۹,۹۷۱,۰۴۱$

(۵) $۹۷۵,۴۶۱,۰۵۹,۷۸۹,۹۷۸,۰۴۱$

۹. میدانی به شکل زیر داریم. در هر ثانیه از هر خیابان دقیقاً یک ماشین وارد میدان می‌شود و به صورت پادساعت‌گرد در میدان حرکت می‌کند. هر ماشینی که از یک خیابان وارد میدان می‌شود قبل از اینکه یک دور کامل در میدان بزند، با احتمال برابر از یکی از سه خیابان دیگر خارج می‌شود. اگر بدانیم یک ماشین از ناحیه هاشور خورده عبور کرده است، احتمال اینکه این ماشین از خیابان ۱ خارج شده باشد چقدر است؟

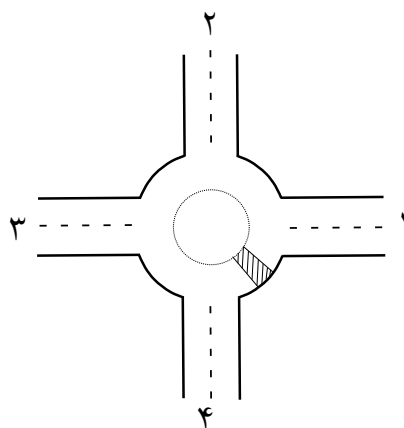
(۵) $\frac{1}{6}$

(۴) $\frac{1}{4}$

(۳) $\frac{1}{3}$

(۲) $\frac{1}{2}$

(۱) $\frac{2}{3}$



۱۰. زیرمجموعه S از اعداد حقیقی مثبت را «خوب» می‌گوییم اگر بیش از یک عضو داشته باشد و به ازای هر $x, y \in S$ داشته باشیم $xy \in S$. برای چند تا از خاصیت‌های زیر مجموعه‌ای خوب می‌توان مثال زد که خاصیت مورد نظر را داشته باشد؟

- S متناهی عضو داشته باشد.
- برای هر بازه با طول بیشتر از صفر در اعداد مثبت، بی‌نهایت عضو S در آن بازه باشند.
- S نامتناهی عضو داشته باشد ولی کران بالا داشته باشد. یعنی عدد M موجود باشد که از تمامی اعضای مجموعه بیشتر است.
- S کوچکترین و بزرگترین عضو داشته باشد.

۱۱. در یکی از حملات علیه ایران، یک جنگنده «اف ۳۵» که همواره در ارتفاع ثابتی پرواز می‌کرد، از خاک کشور عراق به سمت مرزهای کشورمان در حال نزدیک شدن بود که رادار ایرانی «باور ۳۷۳» که در ارتفاع ۲ کیلومتری از سطح زمین مستقر شده بود در اولین فرصت و در فاصله مستقیم ۳۹۰ کیلومتری از خود، توانست این جنگنده را شناسایی و حمله آن را خنثی کند. اگر شعاع کره زمین را ۶۳۹۹ کیلومتر در نظر بگیریم، ارتفاع پرواز این جنگنده حدود چند کیلومتر بوده است؟ (رادار را یک نقطه در نظر بگیرید که اگر خط مستقیمی بدون مانع از رادار به هواپیما وجود داشته باشد هواپیما را شناسایی می‌کند.)



۱ (۵)

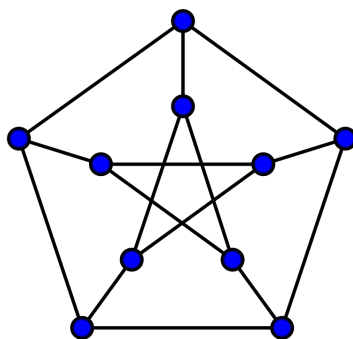
۷ (۴)

۲ (۳)

۱۰ (۲)

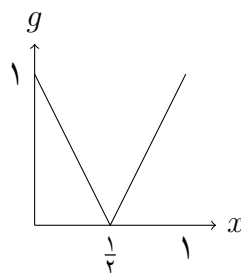
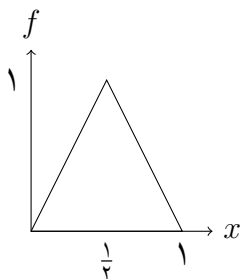
۵ (۱)

۱۲. در شکل زیر داخل دایره‌ها غنچه روییده است. تعدادی از این غنچه‌ها شکوفا شده‌اند. در هر مرحله غنچه درون دایره‌ای که حداقل دو تا از غنچه‌های مجاورش شکوفا شده باشند، شکوفا می‌شود. اگر پس از مدتی همه غنچه‌ها شکوفا شوند، حداقل چند غنچه در اول شکوفا شده بوده‌اند؟ (منظور از دو غنچه مجاور غنچه‌هایی هستند که دایره‌هایی که در آن قرار دارند در شکل با خطی مستقیم به هم وصل شده‌اند.)



۱۳. فرض کنید نمودار دو تابع $f, g : [0, 1] \rightarrow [0, 1]$ مطابق شکل‌های زیر باشد. در این صورت کدام گزینه درست است؟

- (۱) برای هر $x \in [0, 1]$ ، $f(f(x)) = g(g(x))$.
- (۲) برای هر $x \in [0, 1]$ ، $f(f(x)) = f(g(x))$.
- (۳) برای هر $x \in [0, 1]$ ، $f(f(x)) = g(f(x))$.
- (۴) هیچ کدام از موارد قبلی درست نیست.
- (۵) در بین سه گزینه اول، دست کم دو مورد درست است.



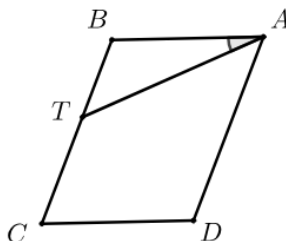
۱۴. در دوزنقه $ABCD$ ، می‌دانیم $AB = \frac{1}{3}CD = \sqrt{3}$ و $BC = AD = \sqrt{7}$. P را دومین نقطه برخورد دایره‌های به قطرهای AD و CD (غیر از D) بگیرید. مساحت مثلث PAB کدام است؟

- (۱) $\frac{\sqrt{3}}{2}$
- (۲) $\frac{\sqrt{3}}{4}$
- (۳) $\frac{\sqrt{3}}{6}$
- (۴) $\frac{\sqrt{3}}{7}$
- (۵) $\frac{\sqrt{3}}{8}$

۱۵. چند زوج مرتب (a, b) از عددهای صحیح و مثبت پیدا می‌شود که ab^2 برابر 21^{22} باشد؟

۱۶. علی و رضا یک بازی نوبتی را به این ترتیب انجام می‌دهند که در مرحله اول علی یک عدد کوچک تر از 50° انتخاب می‌کند. در مراحل بعدی در هر مرحله بازیکنی که نوبت اوست می‌تواند یک واحد از عدد کم کند یا آن را با یکی از مقسوم‌علیه‌هایش به جز عدد یک و خود آن عدد، عوض کند. بازی زمانی تمام می‌شود که به عدد ۲ برسیم. هدف علی این است که بازی تا جای امکان طول بکشد و هدف رضا این است که بازی هر چه سریع‌تر تمام شود. اگر هر دو بهترین بازی خود را انجام دهند بازی آن‌ها حداکثر چند مرحله طول می‌کشد؟
🔔 حاصل عددی زوج است.

۱۷. متوازی‌الاضلاع $ABCD$ در صفحه مفروض است به طوری که $AB = ۲۱$. نقطه T را روی پاره‌خط BC طوری انتخاب کرده‌ایم که $\angle TAB = ۳۰^\circ$ و $\frac{BT}{TC} = \frac{۳}{۷}$. فاصله نقطه D از خط AT را به دست بیاورید.



۱۸. تعداد عددهای حقیقی و ناصفر x را بیابید که رابطه زیر برقرار باشد. (منظور از $[x]$ ، جزء صحیح x یعنی بزرگترین عدد صحیحی که از x بیشتر نباشد است.)

$$\frac{x}{[x]} = \frac{۱۴۰۳}{۱۴۰۲}$$

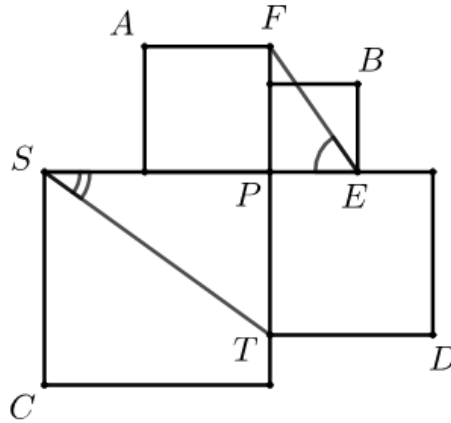
📌 جواب عددی فرد است.

۱۹. یک تخته چوبی به شکل پنج‌ضلعی منتظم داریم که از هر پنج گوشه‌اش با طناب از سقف آویزان شده است و موازی سطح زمین قرار دارد. یک سیب در مرکز این چند ضلعی قرار داده‌ایم. یک تیرانداز به هر کدام از طناب‌ها یک بار شلیک می‌کند. اگر هر شلیک او به احتمال پنجاه درصد طناب را پاره کند احتمال اینکه سیب سقوط کند عددی به شکل $\frac{m}{n}$ است که n و m نسبت به هم اول هستند. در این صورت اختلاف n و m چند است؟ (فرض کنید اگر تخته چوبی دیگر موازی سطح زمین نباشد سیب سقوط خواهد کرد.)

۲۰. چند دوتایی (x, y) از اعداد حقیقی نامنفی وجود دارند که $x, y \leq ۴$ و داشته باشیم:

$$(x + y)^2 = (1 + x)(y - 1)$$

۲۱. در شکل زیر چهار مربع را طوری کنار هم گذاشته‌ایم که چهارضلعی $ABCD$ محاطی شده است. اگر زاویه $\angle PST$ برابر 30° درجه باشد، زاویه $\angle FEP$ چند درجه خواهد بود؟



۲۲. چند دوتایی (m, n) از اعداد طبیعی موجود هستند که $m^{1403} + n$ بر mn قابل قسمت باشد؟

۲۳. ساختمان یاس ساختمانی با تعداد طبقات نامتناهی است که از بالا و پایین بدون انتهاست! طبقات این ساختمان با تمام اعداد صحیح شماره‌گذاری شده‌اند. همچنین این ساختمان یک آسانسور عجیب دارد که به‌طور خودکار بین طبقات جابه‌جا می‌شود! به این صورت که اگر در طبقه‌ای با شماره زوج مانند $2n$ قرار داشته باشد به طبقه n می‌رود و در غیر این صورت 7 طبقه بالا می‌رود. اگر در مرحله‌ای در طبقه 403 باشد، 15 مرحله قبل‌تر در چند طبقه مختلف ممکن است بوده باشد؟
📌 جواب بر 3 بخش‌پذیر است.

۲۴. تعریف کنید

$$\alpha = \log_1 2, \beta = \log_1 3, \gamma = \log_1 5, \theta = \log_1 7$$

عددهای زیر همگی به عددی صحیح نزدیک هستند. کدام یک نزدیک‌ترین عدد به عددی صحیح است؟

$$\beta + \theta + \gamma \quad (5) \quad 2\alpha + 6\beta \quad (4) \quad 2\alpha + \beta + \theta \quad (3) \quad 5\alpha + \beta \quad (2) \quad 2\beta \quad (1)$$

۲۵. می‌خواهیم از روی خطوط، این شکل را تا بزنیم تا در نهایت فقط یک مثلث کوچک دیده شود. حداقل به چندبار تا زدن نیاز داریم؟

