

سؤالات مرحله دوم المپیاد ریاضی سال ۱۴۰۲

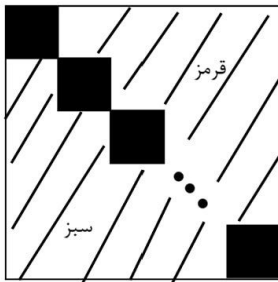
۱- در مثلث ABC می‌دانیم، $\angle A = 90^\circ$. P نقطه‌ای دلخواه درون ABC است. تصویر P روی BC را D می‌نامیم. PD، خطوط AB، AC را به ترتیب در F، E قطع می‌کند. همچنین دایره‌های APE و APF به ترتیب BP را در X و CP را در Y قطع می‌کنند. ثابت کنید PD، BY، CX هم‌رس هستند.

۲- ثابت کنید به ازای هر $n \in \mathbb{N}$ ، $n \geq 2$ ، یک n -تایی مرتب $(a_1, a_2, \dots, a_n)$ از اعداد طبیعی دو به دو نسبت به یکدیگر اول وجود دارد که همگی از 1402 بزرگ‌تر باشند و تساوی زیر برقرار باشد.

$$\left\lfloor \frac{a_1}{a_2} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{a_2}{a_3} \right\rfloor + \dots + \left\lfloor \frac{a_n}{a_1} \right\rfloor = \left\lfloor \frac{a_2}{a_1} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{a_3}{a_2} \right\rfloor + \dots + \left\lfloor \frac{a_1}{a_n} \right\rfloor$$

(منظور از $\lfloor x \rfloor$ بزرگ‌ترین عدد صحیح است که کوچک‌تر یا مساوی x باشد)

۳- یک جدول $n \times n$ داریم. به ازای هر $1 \leq i, j \leq n$ ، خانه سطر i -ام و ستون j -ام را با قاعده زیر رنگ می‌کنیم:



۱. اگر $i = j$ سیاه

۲. اگر $i < j$ قرمز

۳. اگر $i > j$ سبز

و رنگ آن خانه را $a_{i,j}$ می‌نامیم. هر بار جای دو سطر را با یکدیگر عوض می‌کنیم و n -تایی مرتب $(a_1, a_2, \dots, a_{n,n})$ را یادداشت می‌کنیم. با تکرار این کار به چند n -تایی مرتب مختلف می‌توانیم برسیم؟ (در یک n -تایی مرتب ترتیب اعداد مهم هستند)

۴- عدد طبیعی فرد n داده شده است. کوچک‌ترین عدد طبیعی k را بیابید که بتوان خانه‌های یک جدول $3 \times k$ را با اعداد صحیح نامنفی به گونه‌ای پر کرد که دو شرط زیر برقرار باشند:

۱. جمع اعداد هر ستون برابر n باشد.

۲. و در هر سطر هر یک از اعداد $0, 1, \dots, n$ دست کم یک بار ظاهر شده باشند.

سؤالات مرحله دوم المپیاد ریاضی سال ۱۴۰۲

۵- یک دنباله $(P_n)_{n \in \mathbb{N}}$ از چندجمله‌ای‌ها را تصاعد حسابی با قدر نسبت $Q(x)$ می‌گوییم هرگاه برای هر n ، $P_{n+1} = P_n + Q$.

فرض کنید یک تصاعد حسابی از چندجمله‌ای‌ها با قدر نسبت $Q(x)$ و جمله اول $P(x)$ داریم به طوری که P و Q چندجمله‌ای‌هایی تکین با ضرایب صحیح هستند که هیچ ریشه مشترک صحیحی ندارند. همچنین هر عضو تصاعد حداقل یک ریشه صحیح دارد. ثابت کنید

آ- $P(x)$ بر $Q(x)$ بخش پذیر است.

ب- چندجمله‌ای $\frac{P(x)}{Q(x)}$ درجه یک است.

۶- دو دایره W_1, W_2 با شعاع‌های یکسان در P, Q تقاطع دارند. نقطه‌های B و C روی دایره‌های W_1 و W_2 طوری قرار دارند که به ترتیب

داخل دایره‌های W_1 و W_2 هستند. همچنین نقطه‌های X و Y متمایز از P روی به ترتیب W_1 و W_2 طوری قرار دارند که

$\angle CPQ = \angle CXQ$ و $\angle BPQ = \angle BYQ$. محل برخورد دایره‌های محیطی مثلث‌های XPC و YPB را S می‌نامیم. ثابت کنید XY, BC, QS

هم‌رس هستند.